2008 级 2008-2009 秋季学期

《数学分析》

期末考试试题解答

A 卷

2009 年 1 月 15 日 (星期四)：14:00 – 18：00　**地点：西阶**

第一题　导数, 微分, 以及求导计算的基本法则 (18 分)

1. (1+1+2 分) 叙述导数与微分的定义, 以及它们之间的关系.

2. (2 分) 叙述关于高阶导数的 Leibniz 公式.

3. (2 分) 设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ 为复数. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{j=1}^{m} a_j \sin jx\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right| ,$$

证明:

$$\left|\sum_{j=1}^{m} j a_j\right| \leqslant |b_1| .$$

4. (4 分) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + b \,, \text{若 } x \geqslant 0 \,, \\ \quad c \sin x \,, \quad \text{若 } x < 0 \,. \end{cases}$$

确定 a, b, c 使得函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导.

5. (3 分) 对任意 $x > 0$, 定义

$$f(x) = \arctan(x + \sqrt{1 + x^2}) \,.$$

求导函数 f'.

6. (3 分) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f(x) = x^2 \sin x$. 对任意整数 $n \geqslant 2$, 求 $f^{(n)}$.

第一题解答:

1. 解: 设 E 为非空集合, $x_0 \in E$ 为 E 的极限点, 而 $f : E \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) 称 f 在点 x_0 处可导, 若下列极限存在且有限

$$\lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

此时称该极限为 f 在点 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$.

(b) 称 f 在点 x_0 处可微, 若存在线性映射 $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (E \ni x \to x_0).$$

此时称 A 为 f 在点 x_0 处的微分, 记作 $df(x_0)$.

(c) 函数 f 在点 x_0 处可导当且仅当它在该点处可微. 此时

$$df(x_0) = f'(x_0)dx\,,$$

其中 $dx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为线性映射使得 $\forall h \in \mathbb{R}$, 均有 $dx(h) = h$.

2. 解: 设 $n \in \mathbb{N}$, 而 $u, v : E \to \mathbb{R}$ 为 n 阶可导. 则 uv 在 E 上 n 阶可导且

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}\,.$$

3. 证明: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 由题设可得

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\sin jx}{x} \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} b_k x^{k-1} \right|.$$

再让 $x \to 0$ 并利用极限的基本性质可知

$$\left| \sum_{j=1}^{m} j a_j \right| \leqslant |b_1|\,.$$

4. 证明: 由初等函数的性质可知函数 f 分别在 $[0, +\infty[$ 上和 $]-\infty, 0[$ 上为无穷可导. 于是 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导当且仅当 f 在原点处为二阶可导, 而这又等价于说下列等式成立:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x)\,,$$
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x}\,,$$
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}\,,$$

由 f 的定义可知, 上述三等式分别等价于 $b=0$, $1=c$, $2a=0$. 于是 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导当且仅当 $a=0$, $b=0$, $c=1$.

5. 解: 由初等函数的复合求导法则可知, 对任意 $x>0$, 成立

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2\left(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{1}{2(1+x^2)}\,.
\end{aligned}
$$

6. 解: 由于所涉及的均为初等函数, 因此无穷可微. 故对任意整数 $n\geqslant 2$, 由 Leibniz 公式可知

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}\\
&= x^2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)+2nx\sin\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\\
&\quad +n(n-1)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\\
&= \left(x^2-n(n-1)\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)-2nx\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)\,.
\end{aligned}
$$

第二题 微分学的基本定理 (10 分)

1. (3 分) 叙述下述定理的内容:

   (a) Lagrange 中值定理, (b) Cauchy 中值定理, (c) Darboux 定理.

2. (3 分) 设 $f\in\mathscr{C}([a,b])$ 在 $]a,b[$ 上可导且使得 $f(a)=f(b)=0$. 借助适当辅助函数和 Lagrange 中值定理证明: $\exists\xi\in]a,b[$ 使得

$$f(\xi)=f'(\xi)\,.$$

3. (4 分) 设函数 f 在开区间 $]a,b[$ 内可微 (其中 a,b 可以为无限), 且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x)\in\mathbb{R}\,.$$

   利用 Darboux 定理证明: $\exists\xi\in]a,b[$ 使得 $f'(\xi)=0$.

第二题解答:

1. 解: (a) Lagrange 中值定理: 若函数 $f \in \mathscr{C}([a,b])$ 在 $]a,b[$ 内可微, 则存在 $\xi \in]a,b[$ 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(b) Cauchy 中值定理: 若函数 $f,g \in \mathscr{C}([a,b])$ 在 $]a,b[$ 内可微, 则存在 $\xi \in]a,b[$ 使得 $g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)=f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)$.

特别地, 若 g' 在 $]a,b[$ 内恒不为零, 则 $g(a)\neq g(b)$ 且

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

(c) Darboux 定理: 若函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可导, 而 μ 严格介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间, 则存在 $\xi \in]a,b[$ 使得 $f'(\xi)=\mu$.

2. 证明: $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x)=f(x)e^{-x}$. 由题设条件可知 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在其内部可导. 故由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi \in]a,b[$ 使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=\big(f'(\xi)-f(\xi)\big)e^{-\xi}(b-a)\,.$$

又 $f(a)=f(b)=0$, 故 $F(a)=F(b)=0$, 进而可知 $f'(\xi)=f(\xi)$.

3. 证明: 用反证法, 假设所要证的结论不成立. 则由 Darboux 定理可知, 在 $]a,b[$ 上, 或者恒有 $f>0$, 或者恒有 $f<0$. 不失一般性, 假设 $f>0$ (否者考虑 $-f$). 则 f 在 $]a,b[$ 上递增, 于是由函数的单调有界定理可知

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\inf_{a<x<b} f(x)<\sup_{a<x<b} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)\,.$$

这与题设矛盾. 故所证结论成立.

第三题 函数单调性与不等式 (13 分)

1. (3+2+3 分) 对任意 $z>0$, 定义 $f(z)=\ln z-z+1$.

   (a) 证明: 函数 f 在 $]0,+\infty[$ 上有最大值, 并求出该最大值.

   (b) 证明: 对任意 $z>0$, 成立 $\ln z\leqslant z-1$.

   (c) 证明: 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ $(y>0)$, 成立

$$xy\leqslant e^x+y\ln\frac{y}{e}\,.$$

2. (3+2 分) 设 $f:\ [0,+\infty[\to[0,+\infty[$ 可微且 $\forall x\geqslant 0$, 均有 $f'(x)\leqslant f(x)$.

   (a) 对任意 $x\geqslant 0$, 定义 $g(x)=f(x)e^{-x}$. 证明: 函数 g 在 $[0,+\infty[$ 上可微, 非负, 非增.

   (b) 若 $f(0)=0$, 证明: 函数 f 在 $[0,+\infty[$ 上恒等于 0.

第三题解答:

1. 证明: (a) 由于 f 为初等函数, 故可导, 且 $\forall z>0$, 成立

$$f'(z)=\frac{1}{z}-1\,.$$

于是 f' 在 $]0,1[$ 上为正, 而在 $]1,+\infty[$ 为负. 这就表明 f 在 $]0,1]$ 上递增, 而在 $[1,+\infty[$ 上递减, 因此 f 在点 $z=1$ 处取最大值 $f(1)=0$.

(b) 由 (a) 可知, 对任意 $z>0$, 都有 $f(z)\leqslant f(1)=0$, 故 $\ln z\leqslant z-1$.

(c) 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ $(y>0)$, 在 (b) 中令 $z=e^x/y>0$. 则

$$\ln\frac{e^x}{y}\leqslant\frac{e^x}{y}-1\,,$$

于是 $x-\ln y\leqslant\frac{e^x}{y}-1$. 即 $x\leqslant\frac{e^x}{y}-\ln\frac{y}{e}$. 由此立刻可得所要结论.

2. 证明: (a) 由于函数 f 在 $[0,+\infty[$ 上可微非负, 故 g 也可微非负. 另外, 对任意 $x\geqslant 0$, 我们都有 $f(x)=g(x)e^x$, 从而 $f'(x)=\big(g(x)+g'(x)\big)e^x$. 于是由题设可知 $\big(g(x)+g'(x)\big)e^x\leqslant g(x)e^x$, 即 $g'(x)\leqslant 0$. 故 g 非增.

(b) 由于 g 在 $[0,+\infty[$ 上非负非增, 故对任意 $x\geqslant 0$, 成立

$$0\leqslant g(x)\leqslant g(0)=f(0)=0\,,$$

因此 $g(x)=0$, 从而 $f(x)=0$. 即所证结论成立.

第四题 凸函数 (9 分)

1. (2 分) 叙述凸函数的定义.

2. (4 分) 设 $f\in\mathscr{C}(]a,b[)$. 证明 f 为凸函数当且仅当 $\forall x,y\in]a,b[$, 成立

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}\,.$$

3. (3 分) 设 $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ 为凸函数. $\forall x \in]a,b[$, 定义

$$F(x) = e^{f(x)}.$$

证明: F 为凸函数.

第四题解答:

1. 解: 设 $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ 为函数. 若对任意 $x, y \in]a,b[$ 以及 $\alpha \in [0,1]$, 均有

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),$$

则称 f 为 $]a,b[$ 上的凸函数.

2. 证明: **必要性.** 若 f 为凸函数, 则对任意 $x, y \in]a,b[$ 及 $\alpha \in [0,1]$, 均有

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),$$

特别地, 当 $\alpha = 1/2$ 时, 上式正好给出所要的结论.

充分性. 固定 $x_1, x_2 \in]a,b[$. 我们将对 $n \in \mathbb{N}$ 用数学归纳法证明

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

其中 $\lambda = k/2^n$, 而 $k \in \mathbb{N}$ $(0 < k < 2^n)$.

当 $n = 1$ 时, 我们有 $\lambda = 1/2$, 此时所证不等式就是题设条件.

假设所证结论对 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 设 $\lambda = k/2^{n+1}$ $(k \in \mathbb{N}, 0 < k < 2^{n+1})$.

若 $k = 2l$ 为偶数, 则 $\lambda = k/2^n$, 故由归纳假设可知所证不等式成立.

若 $k = 2l - 1$ 为奇数, 令

$$x = \frac{l}{2^n} x_1 + \left(1 - \frac{l}{2^n}\right) x_2, \quad y = \frac{l-1}{2^n} x_1 + \left(1 - \frac{l-1}{2^n}\right) x_2,$$

那么由归纳假设条件可得

$$\begin{aligned}
f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) &= f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\bigg(\frac{l}{2^n} f(x_1) + \left(1 - \frac{l}{2^n}\right) f(x_2) \\
&\quad + \frac{l-1}{2^n} f(x_1) + \left(1 - \frac{l-1}{2^n}\right) f(x_2)\bigg) \\
&= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).
\end{aligned}$$

故所证不等式对于 $n+1$ 也成立.

对任意 $\lambda \in]0,1[$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 令 $k_n = [2^n\lambda]$. 由夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n} = \lambda \,,$$

进而由 f 的连续性以及前面由数学归纳法所证的不等式可得

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) &= \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{k_n}{2^n}x_1 + \left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)x_2\right) \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{k_n}{2^n}f(x_1) + \left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(x_2)\right) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

故所证结论成立.

3. 证明: 由函数 f 的凸性, 指数函数的递增性以及指数函数的凸性可知, 对任意 $x, y \in]a,b[$ 以及 $\alpha \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned} F\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) &= e^{f(\alpha x+(1-\alpha)y)} \leqslant e^{\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)} \\ &\leqslant \alpha e^{f(x)} + (1-\alpha)e^{f(y)} = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y)\,. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

第五题 函数极限 (25 分)

1. (2 分) 叙述局部 Taylor 公式.

2. (2 分) 叙述 L'Hôpital 法则.

3. (3 分) 设函数 $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in]a,b[$ 处有二阶导数. 证明:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)\,.$$

4. (2+2+2 分) 设 $x \geqslant 0$.

   (a) 求解以 $\theta(x)$ 为未知元的方程

   $$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\,.$$

   (b) 证明: $\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

(c) 证明:

$$\lim_{x\to 0+0}\theta(x)=\frac{1}{4}\,,\quad \lim_{x\to +\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}\,.$$

5. (4+4+4 分) 计算下列函数极限

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x-\cos x}{x^2}\,,\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\,,$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}\,.$$

第五题解答:

1. 解: 设 E 为区间而 $x_0\in E$. 若 $f:E\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处有 $n\geqslant 1$ 阶导数, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\big((x-x_0)^n\big)\quad (E\ni x\to x_0)\,.$$

2. 解: 设函数 $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ 可微且对任意 $x\in]a,b[$, 均有 $g'(x)\neq 0$. 设

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\,.$$

如果

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}g(x)=0 \text{ 或 } \lim_{x\to a+0}g(x)=\infty\,,$$

那么

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\,.$$

3. 证明: 由题设及局部 Taylor 公式可知, 当 $h\to 0$ 时, 我们有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)\,,$$
$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)\,,$$

由此立刻可得

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)=f''(x_0)h^2+o(h^2)\,,$$

进而可知所证结论成立.

4. 解: (a) 由题设方程可得

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}\,,$$

进而可得

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x\\&=\frac{1}{4}\big(1-2x+2\sqrt{x(x+1)}\big)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2\,.\end{aligned}$$

将之带入原方程可知的确为所求解.

(b) 由 (a) 立刻可知 $\theta(x)\leqslant 1/2$. 另一方面, 对任意 $x\geqslant 0$, 我们有

$$0\leqslant\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\leqslant 1\,,$$

于是由 (a) 可得

$$\theta(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\,.$$

故所证不等式成立.

(c) 由 (a) 可知, 对任意 $x\geqslant 0$, 我们有

$$\theta(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}\,,$$

于是由函数极限的基本性质立刻可得

$$\lim_{x\to 0+0}\theta(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}\,.$$

5. (a) 由 L'Hôpital 法则立刻可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{2}=1\,.$$

(b) 当 $x\to 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x-1}&=\frac{1}{x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)}\\&=\frac{1}{x\big(1+\frac{1}{2}x+O(x^2)\big)}\\&=\frac{1}{x}\Big(1-\frac{1}{2}x+O(x^2)\Big)\\&=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+O(x)\,,\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

(c) 当 $x\to 0$ 时, 我们有

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+O(x^5)\,,\quad e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O(x^5)\,,$$

由此立刻可得

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+O(x^5)=-\frac{x^4}{12}+O(x^5)\,,$$

进而我们就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}\,.$$

第六题 原函数 (25 分)

1. (2 分) 叙述原函数的定义.
2. (3+4+4 分) $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $Q(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$
   (a) 将多项式 Q 分解成实系数既约多项式的乘积.
   (b) 将有理分式
   $$\frac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$
   化成实有理分式的标准形式.
   (c) 求不定积分
   $$\int \frac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx\,.$$
3. (4+4+4 分) 求下列不定积分

$$(a)\ \int\frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}\,,\ (b)\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}\,,\ (c)\ \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+5}}\,.$$

第六题解答:

1. 解: 设 E 为非空集合且没有孤立点, 而 $F,f:E\to\mathbb{R}$ 为函数. 若 F 可微且满足 $F'=f$, 则称 F 为 f 在 E 上的原函数.

2. 解: (a) 由题设可知

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - 2x + 1)x^2 + (x^2 - 2x + 1) \\
&= (x-1)^2(x^2+1).
\end{aligned}
$$

由于多项式 x^2+1 没有实根, 因此上式就是所求的既约分解.

(b) 由题设可知

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{2x^2(x-1) + x^2 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} \\
&= \frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(x^2+1) + (x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

(c) 由 (b) 立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx \\
&= \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + C\,,
\end{aligned}
$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为常数.

3. 解: (a) 由题设可知

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{(\tan^2 x + 4)\cos^2 x} \\
&= \int \frac{d\tan x}{\tan^2 x + 4} \\
&= \int \frac{d\frac{\tan x}{2}}{2\left(\left(\frac{\tan x}{2}\right)^2 + 1\right)} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2} + C\,,
\end{aligned}
$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为常数.

(b) 由题设可知

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}} &\overset{y=\sqrt[3]{1-3x}}{=} \int \frac{(1-y^3)\,d(1-y^3)}{9y} \\
&= \frac{1}{3}\int (y^3-1)y\,dy \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{2}y^2\right)+C \\
&= \frac{1}{15}(1-3x)^{5/3}-\frac{1}{6}(1-3x)^{2/3}+C\,,
\end{aligned}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为常数.

(c) 令 $y=x+1+\sqrt{x^2+2x+5}$, 则 $x=-1+(y^2-4)/(2y)$, 于是

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+5}} \\
&= \int \frac{d\frac{y^2-4}{2y}}{y-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\left(1+\frac{4}{y^2}\right)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{5}{y-1}-\frac{4}{y}-\frac{4}{y^2}\right)\,dy \\
&= \frac{5}{2}\log|y-1|-2\log|y|+\frac{2}{y}+C \\
&= \frac{5}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+2x+5}\right)-2\log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right) \\
&\quad +\frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}+C \\
&= \frac{5}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+2x+5}\right)-2\log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x-1\right)+C\,,
\end{aligned}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为常数.

附加题 (8 分)

1. (4 分) 设函数 $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ 在原点处连续, 而 $\lambda\neq\pm1$ 为实数使得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\lambda x)-f(x)}{x}=A\in\mathbb{R}\,.$$

证明: 函数 f 在原点处可导且

$$f'(0)=\frac{A}{\lambda-1}\,.$$

2. (4 分) 设 $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in \mathbb{R}$, 均有 $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

证明: 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上解析. 即 $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\,.$$

附加题解答:

1. 证明: 首先考虑 $|\lambda| < 1$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由题设可知存在 $\delta \in]0,1[$ 使得对任意 $x \in]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$, 均有

$$\left|\frac{f(\lambda x) - f(x)}{x} - A\right| \leqslant (1 - |\lambda|)\varepsilon\,,$$

于是 $|f(\lambda x) - f(x) - Ax| \leqslant (1 - |\lambda|)\varepsilon|x|$. 由于 $|\lambda| < 1$, 因此对任意 $k \in \mathbb{N}$, 我们也有 $0 < |\lambda^{k-1}x| < \delta$, 从而

$$|f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k-1}x) - \lambda^{k-1}xA| \leqslant |\lambda^{k-1}x|(1 - |\lambda|)\varepsilon\,,$$

由此以及 f 在原点处的连续性立刻可得

$$\begin{aligned}
\left|f(0) - f(x) - \frac{Ax}{1-\lambda}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\big(f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k-1}x) - \lambda^{k-1}xA\big)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\big|f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k-1}x) - \lambda^{k-1}xA\big| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda^{k-1}x|\right)(1 - |\lambda|)\varepsilon = |x|\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

这正表明 f 在原点处可导, 且 $f'(0) = A/(\lambda - 1)$.

现假设 $|\lambda| > 1$. 由题设以及复合极限法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\lambda^{-1}x) - f(x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y) - f(\lambda y)}{\lambda y} = -A\lambda^{-1} \in \mathbb{R}\,,$$

于是由前面的结论可知此时 f 在原点处可导, 且

$$f'(0) = \frac{-A\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} - 1} = \frac{A}{\lambda - 1}\,.$$

综上所述可知所证结论成立.

2. 证明: 当 $x=0$, 所证为恒等式.

现假设 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 因为 $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, 故对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ_n 介于 0 和 x 之间使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\, x^n\,.$$

同样地, 存在 ζ_n 介于 $|x|$ 和 $3|x|$ 之间使得

$$f(3|x|) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(|x|)}{k!}|2x|^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta_n)}{(n+1)!}|2x|^{n+1}\,.$$

由题设条件可知 $\forall m \in \mathbb{N}$, 均有 $f^{(m)} \geqslant 0$, 故

$$\frac{f^{(n)}(|x|)}{n!}|2x|^n \leqslant f(3|x|) - f(|x|)\,.$$

又 $f^{(n+1)} \geqslant 0$, 故 $f^{(n)}$ 非降, 从而

$$0 \leqslant \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \leqslant \frac{f^{(n)}(|x|)}{n!} \leqslant \frac{f(3|x|) - f(|x|)}{|2x|^n}\,,$$

由此立刻可得

$$\left| \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\, x^n \right| \leqslant \frac{f(3|x|) - f(|x|)}{2^n}\,,$$

进而由夹逼原理可知

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\,.$$

故所证结论成立.